Informations sur l'examen final.

Questions CM et VF	Questions ouvertes
80%	20%
partie commune	partie spécifique à la section

Examen écrit en présentiel. en janvier 2022. („Informations Examen 2021" sur Moodle).

Informations sur le test blanc.

Date: 15 novembre, 10h15 - 12h, CO1.

7 QCM + 4 VF + 1 question ouverte., 60 minutes.

Sujets: cours 1 - 15., semaines 1-8.

Le test ne comptera pas dans la note finale.

Aucun document ni aucun outil éléctronique n'est autorisé.

Rappel: Théorème de Bolzano et Weierstrass.

Il existe une sous-suite convergente dans toute suite bornée.

(a_n) : $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists (a_{n_k}) \subset (a_n) : \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$.

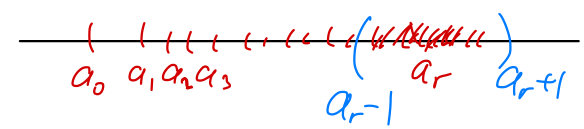
Déf La suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $\forall m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

Proposition. Une suite (a_n) est une suite de Cauchy $\overset{\text{si et seulement si}}{\Longleftrightarrow}$ (a_n) est convergente.

Dém: $\Rightarrow$) (a_n) une suite de Cauchy. $\Rightarrow$ (a_n) est bornée.

$\exists r \in \mathbb{N} : |a_n - a_r| \leq 1 \quad \forall n \geq r \Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_r|+1, |a_0|, |a_1|, \ |a_{r-1}|\}$

$\Rightarrow$ Par BW $\exists$ une sous-suite convergente : $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$



On a: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que

(1) $|a_p - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq m_0$ puisque (a_n) est une suite de Cauchy

(2) $|a_{n_j} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0$ puisque (a_{n_k}) converge vers ℓ.

Soit $k_0 = \max(m_0, j_0) \Rightarrow \forall n \geq k_0$, (1) $n \geq m_0$ et $n_{k_0} \geq k_0 \geq m_0$

(2) $n_{k_0} \geq n_{j_0}$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - \ell| \overset{\triangle}{\leq} |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

$\Leftarrow$) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow \forall p, q \geq n_0$ on a : $|a_p - a_q| = |a_p - \ell + \ell - a_q| \overset{\Delta}{\leq} |a_p - \ell| + |\ell - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Rightarrow (a_n)$ est une suite de Cauchy. $\boxed{///}$

Remarque. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ n'implique pas que (a_n) est une suite de Cauchy.

Ex. $a_n = n^{1/2} = \sqrt{n}$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left((n+k)^{1/2} - n^{1/2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\underbrace{(n+k)^{1/2} + n^{1/2}}_{\to\infty}} = 0$

k est fixé

($n^{1/2}$ n'est pas bornée : si $\exists M : n^{1/2} \leq M\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq M^2\ \forall n \in \mathbb{N}$ faux)

Mais $a_n = n^{1/2} \longrightarrow \infty$ est divergente

$\Rightarrow (a_n)$ n'est pas une suite de Cauchy.

Explication Soit $k \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0$ implique $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$ (k est fixé). Ici n_0 peut dependre de k. Dans l'exemple $a_n = \sqrt{n}$, si on augmente k, on obtient n_0 toujours plus grand pour un $\varepsilon > 0$ donné. Mais dans la propriété de Cauchy, $n_0 \in \mathbb{N}$ est le même pour toute différence $k = m - n$ des indices.

Donc la propriété de Cauchy est plus forte que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

§ 2.9. Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée.

Déf Soit (x_n) une suite bornée : $\exists m, M \in \mathbb{R}$: $m \le x_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $y_n = \sup\{x_k, k \ge n\}$ $\quad y_n \downarrow \quad y_n \ge x_n \ge m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la suite $z_n = \inf\{x_k, k \ge n\}$ $\quad z_n \uparrow \quad z_n \le x_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $(y_n) \downarrow$ suite décroissante et minorée : $m \le x_n \le y_n \Rightarrow$ $\boxed{\exists \lim y_n \overset{\text{déf}}{=} \limsup_{n\to\infty} x_n}$

$(z_n) \uparrow$ suite croissante et majorée : $z_n \le x_n \le M \Rightarrow$ $\boxed{\exists \lim z_n \overset{\text{déf}}{=} \liminf_{n\to\infty} x_n}$

On a : $\quad z_n \le x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ex 1. $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $n \ge 1$ bornée : $-2 \le (x_n) \le 2$.

$$x_n = \left(-2,\ 1+\frac{1}{4},\ -1-\frac{1}{9},\ 1+\frac{1}{16},\ -1-\frac{1}{25},\ \dots\right)$$

$$y_n = \left(1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{16},\ \dots\ 1+\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)^2};\dots\right) \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

$$z_n = \left(-2,\ -1-\frac{1}{9},\ -1-\frac{1}{9},\ -1-\frac{1}{25}\ \cdot\ -1-\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^2}\ \dots\right) \quad \lim_{n\to\infty} z_n = -1.$$

Remarque: Si $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \ell$

On a : $\quad z_n \le x_n \le y_n \quad \Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \ell$.

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell, \qquad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Proposition Une suite bornée (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R} \iff$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \ell \qquad \text{(Voir DZ)}.$$

Ex 1. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$.

On a calculé $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$ $\neq$ $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$ $\Rightarrow$ la suite (x_n) est divergente.

Ex 2. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Trouver y_n, z_n, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n$

$$(x_n) = \left\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \dots \right\}$$

$$y_n = \sup\{x_k, k \geq n\} = (1, 1, 1, \dots) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

$$z_n = \inf\{x_k, k \geq n\} = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \dots\right) = x_n \ ; \ \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

(x_n) est convergente, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

Chapitre 3. Séries numériques

§3.1 Définitions et exemples.

Déf La série de terme général a_n est un couple
(1) la suite (a_n)
(2) la suite des sommes partielles $S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ – Série de terme général a_k.

a_k k-ième terme; $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ n'ième somme partielle.

Déf Série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$ la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

la limite $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$ s'appelle la somme de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$, on écrit $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell}$ et on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers ℓ.

Si (S_n) est divergente, alors on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est divergente.

En particulier, si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

Ex 0. $\sum_{n=0}^{\infty} n$; $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+..+n = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\geq 1}{\geq} n\right)$ n'est pas bornée

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$ La série est divergente.

Ex 1. Série géométrique

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+ \dots + \frac{1}{2^n}\right)$

Rappel: $(1+x+x^2+\dots+x^n)(1-x) = 1+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\dots+\cancel{x^n} - (\cancel{x}+\cancel{x^2}+\dots+\cancel{x^n}+x^{n+1}) = 1-x^{n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$

Soit $x=\frac{1}{2} \Rightarrow S_n = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 0.$ 0 suite géométrique, $\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$

D'une manière similaire on obtient $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ $\quad |r|<1.$

Exercice: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ est divergente, si $|r|\geq 1$.

Si $r>1$ ou $r<-1 \Rightarrow S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

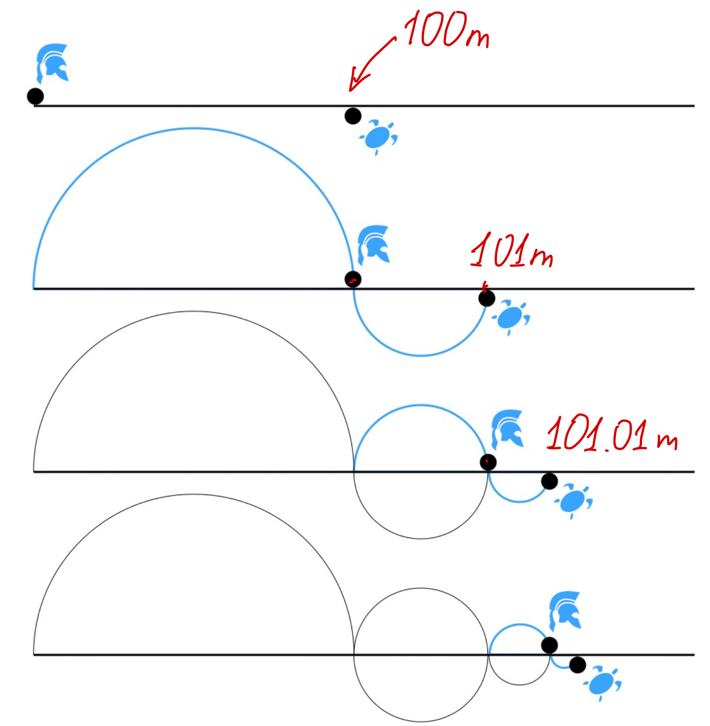
Si $r=1 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$; $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ divergente.

Si $r=-1 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \quad \dots) \Rightarrow (S_n)$ est divergente.

Le paradoxe d'Achille et de la tortue (Zénon, ~450 av. J.C.)

Achille: $10\,\frac{m}{s}$

La tortue: $0.1\,\frac{m}{s}$



Zénon: Achille ne pourra jamais rattraper la tortue s'il la accorde une avance de 100m (par exemple).

Achille → +100m ⇒ la tortue ⇒ +1m

Achille → +1m ⇒ la tortue ⇒ +1cm.

Ainsi, chaque fois la tortue se retrouve encore plus loin qu'Achille.

Considérons le temps quil faudrait à Achille pour rattraper la tortue.

$$T = \frac{100m}{10\frac{m}{s}} + \frac{1m}{10\frac{m}{s}} + \frac{0{,}01m}{10\frac{m}{s}} + \dots = 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \dots + 10\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right)}_{\text{série géométrique},\ r=\frac{1}{100}} =$$

$$= 10 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 10\,\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{1000}{99}\,s.$$

⇒ Achille ratterapera la tortue dans $\frac{1000}{99}$ secondes.

Conclusion: D'aprés Zenon, l'impossibilité pour Achille de rattraper la tortue vient du fait qu'il lui faudrait courir un nombre infini d'intervalles.
Mais d'après notre calcul, une somme infinie d'intervalles de décroissance géométrique converge vers un nombre fini.

Ex 2. Série harmonique.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Cette série est divergente.

Supposons $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. On considère la sous-suite $(S_{2n}) \subset (S_n)$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \quad ; \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$(S_2, S_4, S_6 \ldots) \subset (S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots\ldots)$ Si $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Mais: $$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{= \frac{1}{2n}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$n \to \infty$: $S_{2n} \downarrow S$, $S_n \downarrow S$, $\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

$$0 = S - S \qquad \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2} \text{ absurde.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ et } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ est divergente.}}$$